Introduction à la logique

Cours d'introduction à la logique et à la philosophie du langage au semestre d'hiver 2003-2004

Résumé du cours, sert comme préparation pour l'examen du 3 février

La logique propositionnelle

La domaine de la logique

1. Une inférence formellement valide est valide en vertu de sa forme : elle est valide si et seulement si toute inférence ayant la même forme (logique) l'est aussi.
2. Une inférence est valide s'il n'est pas et seulement s'il n'est pas logiquement possible que ses prémisses soient vraies et sa conclusion fausse. Il faut distinguer la validité d'une inférence de la vérité ou fausseté des propositions qu'elle contient : une inférence avec des prémisses vraies peut être non valide, une inférence avec des prémisses fausses peut être valide.
3. Une langue formelle, comme celle de la logique propositionnelle, est artificiellement construite et manque de dimension pragmatique. Elle sert à la formalisation des arguments.

Un peu d'histoire de la logique

1. Gottlob Frege (*Idéographie*, 1879) a été le premier à axiomatiser la logique propositionnelle et la logique des prédicats.
2. Cette révolution en logique a rendu possible des progrès importants en mathématiques (axiomatisation de l'arithmétique et de la géométrie) et leurs a rajouté deux nouvelles branches, les métamathématiques (étude des calculs formels, Hilbert) et la théorie des ensembles (Cantor, Zermelo).
3. La logique propositionnelle a pris sa forme contemporaine dans les *Principia Mathematica* (1910), de Bertrand Russell et Alfred North Whitehead.
4. Bertrand Russell a découvert, en 1902, une contradiction dans l'axiomatisation de l'arithmétique par Frege ('paradoxe de Russell').
5. Le résultat le plus important en métamathématique était la découverte, par Gödel en 1931, de l'incomplétude de l'arithmétique, le plus important résultat en sémantique la définition, par Alfred Tarski en 1936, d'une définition non-contradictoire de "vérité".
6. Les trois grands courants dans la philosophie des mathématiques dans la première moitié du 20ème siècle étaient le logicisme de Frege (les mathématiques comme partie de la logique), le formalisme de Hilbert (les mathématiques comme manipulations des symboles) et l'intuitionnisme de Brouwer et Heyting (constructivisme, rejet du tiers exclu).

Un peu de philosophie du langage

1. Il faut distinguer l'utilisation et la mention des mots ; dans le deuxième cas, il faut mettre des guillemets. Les mots utilisées constituent le langage objet, les noms des mots mentionnées le métalangage.
2. La syntaxe étudie la forme des expressions et détermine leur grammaticalité ; la sémantique étudie leurs significations et leurs conditions de vérité et la pragmatique systématise leur usage.
3. Selon le principe de compositionalité, la signification d'une expression complexe est une fonction de la signification des expressions simples qu'elle contient et de la manière dont celles-là sont composées pour former l'expression complexe.

4. Nous pouvons introduire des abréviations pour des noms de propositions ; aux guillemets pour les propositions correspondent les demi-crochets de Quine pour les noms de propositions : au lieu de "$\phi \wedge \psi$", nous écrivons "$\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$".

La logique propositionnelle

1. La logique propositionnelle étudie les connecteurs propositionnels qui relient des propositions ; la logique des prédicats étudie en plus la quantification, les relations et les fonctions.
2. La syntaxe détermine quelles sont les formules bien formées d'une langue ; la sémantique donne des interprétations des signes ; elle leur associe une signification.
3. Selon le *principe de vérifonctionnalité*, la valeur de vérité d'une proposition complexe ne dépend que des valeurs de vérité des propositions qui la constituent et des connecteurs qui les relient.
4. Une inférence est valide si et seulement si sa conclusion est une conséquence sémantique de (la conjonction de) ses prémisses.
5. Une inférence est valide si et seulement si l'implication matérielle correspondante (ayant la conjonction des prémisses comme antécédent et la conclusion comme conséquent) est une tautologie.
6. Toute inférence ayant une tautologie comme conclusion est valide.
7. Toute inférence ayant une contradiction comme prémisse est valide.
8. Il y a 16 connecteurs binaires possibles dans la logique propositionnelle. Nous pouvons les définir à partir de "$\neg$" et "$\wedge''$, "$\neg$" et "$\vee$", "$\neg$" et "$\rightarrow$", "$|$" ou "$\downarrow$".
9. Les lois de De Morgan :
$$\ulcorner \neg(\phi \wedge \psi) \urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \ulcorner \neg\phi \vee \neg\psi \urcorner$$
$$\ulcorner \neg(\phi \vee \psi) \urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \ulcorner \neg\phi \wedge \neg\psi \urcorner$$
10. Les lois de distributivité :
$$\ulcorner \phi \vee (\psi \wedge \chi) \urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \ulcorner (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi) \urcorner$$
$$\ulcorner \phi \wedge (\psi \vee \chi) \urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \ulcorner (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi) \urcorner$$

La méthode des tables de vérité

1. Les connecteurs propositionnels sont définis, sémantiquement, par leurs tables de vérité.
2. Une table de vérité pour une proposition spécifie dans chaque ligne une interprétation (attribution de valeurs de vérité aux constituantes simples) ou une possibilité logique. Elle montre comment la valeur de vérité d'une proposition complexe dépend des valeurs de vérité de ses constituantes simples.
3. Si la colonne qui correspond au connecteur principale ne contient que des "V", on parle d'une tautologie.
4. Si à toute ligne qui a "V" pour une première proposition correspond une ligne qui a "V" pour une seconde proposition, la seconde est une conséquence sémantique de la première.
5. Si deux propositions ont la même table de vérité (les mêmes colonnes pour leurs connecteurs principaux), on parle d'une équivalence sémantique.

La méthode syntaxique des calculs hilbertiens

1. La syntaxe ne fait abstraction non seulement de la signification des propositions, mais aussi de leurs valeurs de vérité.

2. Un calcul est un ensemble de formules propositionnelles déterminé par un ensemble de formules propositionnelles qui sont appelées les 'axiomes' et des règles d'inférence. Un élément de cet ensemble est appelé un 'théorème'.
3. Un calcul définit une relation de déductibilité $\vdash$.
4. Il faut distinguer les preuves dans le calcul (qui consistent en des déduction de théorèmes à partir des axiomes à l'aide des règle d'inférence) des preuves sur le calcul (qui en déterminent des propriétés méta-logiques et se servent de toutes les méthodes acceptées en mathématiques).
5. La logique propositionnelle peut être axiomatisée de différentes manières.

La sémantique de la logique propositionnelle

1. Une interprétation propositionnelle associe à toute formule propositionnelle une et une seule valeur de vérité. Elle correspond à une possibilité logique et à une ligne dans une table de vérité.
2. Une formule propositionnelle est une tautologie si et seulement si elle est vraie sous toutes les interprétations de ses constituantes simples. Elle est une contradiction si et seulement si elle n'est vraie sous aucune interprétation.
3. Un ensemble de propositions est consistant s'il y a et seulement s'il y a une interprétation qui rend vraies toutes les propositions de cet ensemble. Autrement, il est inconsistante.
4. Une formule propositionnelle est une conséquence (sémantique) d'un ensemble de propositions (écrit : "$\mathsf{Th} \models \phi$") si et seulement si toute interprétation qui rend vraies toutes les formules propositionnelles dans l'ensemble la rend vraie aussi.
5. Un calcul ou une méthode de preuve syntaxique est correct si tout théorème est une tautologie.
6. Un calcul ou une méthode de preuve syntaxique est complet si toute tautologie est un théorème.
7. Le calcul hilbertien HC, la méthode des arbres et le système de déduction naturelle sont tous corrects et complets.

La méthode des arbres

1. Prouver une proposition par la méthode des arbres revient à montrer que toutes les branches de l'arbre pour sa négation se ferment.
2. Comme teste de consistance, la méthode des arbres nous permet d'établir si ou non une proposition ou un ensemble de propositions est consistant et, dans le cas d'une réponse affirmative, de trouver une interprétation pertinente.
3. La méthode des arbres nous permet d'établir si ou non une proposition donnée est une tautologie : elle l'est si et seulement si l'arbre pour sa négation ne contient que des branches fermées.
4. La méthode des arbres nous permet également de tester un argument pour sa validité, en vérifiant si ou non l'implication correspondante est une tautologie.

La déduction naturelle

1. La caractéristique de la méthode de la déduction naturelle est l'usage des suppositions. La règle des suppositions nous permet d'introduire n'importe quelle supposition à n'importe quelle stade de la preuve ; les règles PC, RAA et $\vee\mathbf{E}$ nous permettent de nous en décharger.
2. Les règles de la déduction naturelle sont des règles d'introduction et d'élimination pour les connecteurs propositionnels et peuvent être conçues comme donnant leurs significations.
3. La méthode de la déduction naturelle nous permet de prouver des théorèmes ("$\vdash p$") et des séquents ("$p \vdash q$").

4. Pour avoir prouvé un théorème ou un séquent, il faut avoir déchargé toute supposition.
5. Pour établir une conclusion implicative, il convient d'utiliser PC.
6. Pour établir une conclusion négative, il convient d'utiliser RAA.
7. Le théorème de déduction nous assure de la validité de la règle de preuve conditionnelle.
8. La méthode de la déduction naturelle nous permet d'utiliser des règles dérivées.

Propriétés métalogiques

1. Le calcul hilbertien, la méthode des arbres et la déduction naturelles sont complets et corrects par rapport aux propositions valides dans la logique des prédicats.
2. La logique propositionnelle est décidable (une procédure de décision serait la construction d'une table de vérité pour la proposition en question).

La logique des prédicats

Phrases ouvertes et quantification

1. Nous obtenons des prédicats (ou 'phrases ouvertes') des propositions en effaçant un ou plusieurs termes singuliers.
2. La syllogistique classique distingue quatre types de propositions : **SaP**, **SiP**, **SeP**, **SoP**.
3. Ces quatre types de propositions correspondent à des relations entre les extensions des termes "S" et "P".
4. Ces relations peuvent être symbolisées à l'aide des diagrammes de Venn ; on peut ainsi vérifier, par exemple, le carré des oppositions.
5. Les inférences valides de la syllogistiques sont des inférences directes ou indirectes ; des dernières il y a 19 principales que l'on peut mémoriser à l'aide des noms comme "Barbara", "Ferio", "Cesare" et "Felapton".
6. Déjà les diagrammes de Venn dépassent les limites de la syllogistique.
7. Les défauts principaux de la syllogistique et des diagrammes de Venn sont : (i) elles ne peuvent pas être combinées avec la logique propositionnelle ; (ii) elle ne ne laissent pas de place pour une 'logique des relations'.
8. Les prédicats ou phrases ouvertes ne sont ni vrais ni faux, mais vrais ou faux *de* certains individus ; les individus les satisfont de la même manière comme les arguments satisfont les fonctions.
9. Les variables indiquent des lacunes dans les phrases ouvertes ; les quantificateurs servent à en former des phrases complètes.
10. Les quantificateurs de la logique des prédicats sont de la même catégorie syntaxique que les prédicats de deuxième ordre.

Syntaxe et sémantique de la logique des prédicats

1. L'alphabet d'une langue pour la logique des prédicats contient des connecteurs, le signe d'identité, des variables, des quantificateurs, des signes de relations, des signes de fonctions et des constantes individuelles. Les trois dernières catégories composent les signes non-logiques de la langue.
2. Une variable a une occurrence libre dans une formule si elle ne se trouve pas partout dans la portée d'un quantificateur correspondant.
3. Une structure pour une telle langue consiste d'un univers de discours et d'une interprétation de ses signes non-logiques.

4. Une interprétation d'une constante lui assigne un élément de l'univers de discours ; l'interprétation d'un signe de relation lui assigne une relation dans cet univers ; et l'interprétation d'un signe de fonction lui assigne une fonction de cet univers dans cet univers.
5. Une assignation de valeurs dans une structure assigne à toute variable de la langue un élément de l'univers de discours.
6. La notion clef de la sémantique de la logique des prédicats est celle de la satisfaction d'une phrase ouverte par une assignation de valeurs dans une structure.
7. Une phrase ouverte est satisfiable dans une structure si elle est vraie sous une assignation de valeurs dans cette structure.
8. Une formule est vraie dans une structure si elle est et seulement si elle est vraie sous toutes les assignations de valeurs dans cette structure. Une telle structure est appelée un 'modèle' de la formule.
9. Une formule est valide si elle est et seulement si elle est vraie dans toutes les structures.
10. L'ordre des quantificateur est important : "$\exists y \forall x Rxy$" implique formellement "$\forall x \exists y Rxy$", mais la converse est fausse.
11. La substitution d'un terme pour une variable dans une formule substitue ce terme à toute occurrence de la variable dans la formule.
12. Pour qu'une telle substitution compte comme instanciation, il faut que le terme soit libre pour la variable dans la formule, c'est-à-dire qu'il ne contient pas de variable qui devient liée par la substitution.
13. Nous pouvons axiomatiser la logique des prédicats par un calcul hilbertien, qui a comme axiomes les tautologies propositions, des schémas des axiomes d'identité et un seul schéma d'axiome quantificationnel, $\ulcorner \forall x(\phi) \rightarrow \phi(x/t) \urcorner$, et deux règles d'inférences, MP et la suivante :

$$\frac{\phi \rightarrow \psi}{\phi \rightarrow \forall x(\psi)} \quad \text{si "}x\text{" n'a pas d'occurrence libre dans } \phi$$

14. Dans une structure ayant un domaine fini, une quantification universelle est équivalente à la conjonction de ses instanciations et une quantification existentielle est équivalente à la disjonction de ses instanciations.

La méthode des arbres

1. Si une quantification universelle $\ulcorner \forall x(\phi(x)) \urcorner$ est vraie, alors toutes ses instanciations $\ulcorner \phi(a) \urcorner$, pour une constante individuelle "a", sont vraies. Si une quantification existentielle $\ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner$ est fausse, alors toutes ses instanciations $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ sont fausses.
2. Si une quantification universelle $\ulcorner \forall x(\phi(x)) \urcorner$ est fausse, alors au moins une instanciation $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ est fausse. Si une quantification existentielle $\ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner$ est vraie, alors au moins une instanciation $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ est vraie.
3. Les règles de construction d'arbres pour le quantificateur universel et la négation d'un quantificateur existentiel sont les suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
\ulcorner \forall x(\phi(x)) \urcorner & & \ulcorner \neg\exists x(\phi(x)) \urcorner \\
| & & | \\
\ulcorner \phi(a_1) \urcorner & & \ulcorner \neg\phi(a_1) \urcorner \\
\ulcorner \phi(a_2) \urcorner & \text{pour toutes les constantes "}a_i\text{"} & \ulcorner \neg\phi(a_2) \urcorner \\
\ulcorner \phi(a_3) \urcorner & \text{apparaissant sur cette branche} & \ulcorner \neg\phi(a_3) \urcorner \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

4. Les règles de construction d'arbres pour le quantificateur existentiel et la négation du quantificateur universel sont les suivantes :

$$\ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner \qquad\qquad\qquad\qquad \ulcorner \neg\forall x(\phi(x)) \urcorner$$

$$\ulcorner \phi(a_1) \urcorner \quad \ulcorner \phi(a_2) \urcorner \quad \ldots \quad \ulcorner \phi(b) \urcorner \qquad \ulcorner \neg\phi(a_1) \urcorner \quad \ulcorner \neg\phi(a_2) \urcorner \quad \ldots \quad \ulcorner \neg\phi(b) \urcorner$$

pour toutes les constantes "a_i" de la branche et une nouvelle constante "b"

5. Nous pouvons simplifier les dernières règles pour "$\exists x(\phi(x))$" et pour "$\neg\forall x(\phi(x))$" en nous concentrant uniquement sur la branche contenant la constante nouvelle.
6. La méthode des arbres nous permet prouver une proposition *si* cette proposition est valide. Mais nous pouvons pas déduire du fait que nous arrivons pas à la prouver (que l'arbre pour sa négation ne se ferme pas) que la proposition n'est pas valide.

La déduction naturelle

1. La déduction naturelle pour la logique des prédicats consiste des règles de déduction naturelles pour les connecteurs et de quatre règles d'introduction et d'élimination de quantificateurs.
2. La règle (SU), appelée *spécialisation universelle*, nous permet de passer d'une quantification universelle à une instanciation de la phrase ouverte pour n'importe quel constante.
3. Pour prouver une quantification universelle à partir des prémisses particulières à l'aide de la règle de *'généralisation universelle'* (GU), nous exigerons donc que ces prémisses soient vraies d'un individu arbitraire, un individu qui n'apparaît dans aucune supposition ou prémisse dont dépend la preuve des propositions singulières.
4. Un quantificateur existentiel est introduit par la règle de *'généralisation existentielle'* (GE).
5. La règle d'élimination du quantificateur existentiel (SE) correspond à celle de l'élimination de la disjonction.
6. L'application de la règle de spécialisation existentielle (SE) comprend quatre étapes :
   (a) la preuve d'une quantification existentielle sous certaines suppositions et à partir de certaines prémisses ;
   (b) la supposition du disjoint typique ;
   (c) une preuve d'une autre proposition sous la supposition du disjoint typique ;
   (d) l'application de la règle, avec la conclusion que nous pouvons également prouver la proposition prouvée sous la supposition du disjoint typique à partir des suppositions et prémisses nécessaires pour la preuve de la quantification existentielle ;

Propriétés métalogiques

1. Le calcul hilbertien, la méthode des arbres et la déduction naturelles sont complets et corrects par rapport aux propositions valides dans la logique des prédicats.
2. La logique des prédicats, contrairement à la logique propositionnelle et à la logique des prédicats unaires, n'est pas décidable, mais seulement semi-décidable.